Variedades em $\mathbb{R}^n$.

$n=2$
$n=3$

$$M = \{ x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0 \}$$

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad m < n, \quad C^1$$

$$\text{car}\, DF(x) = m, \quad \forall x \in M$$

↑ característica

ou Linhas de $DF(x)$ linearmente independentes

ou Existe um bloco quadrado de $DF(x)$ com determinante $\neq 0$.

$$\Longrightarrow M \equiv \text{variedade-}(n-m)$$

dimensão de $M = n - m$

n = nº de variáveis
m = nº de equações

$n-m \equiv$ nº de var. <u>livres</u>

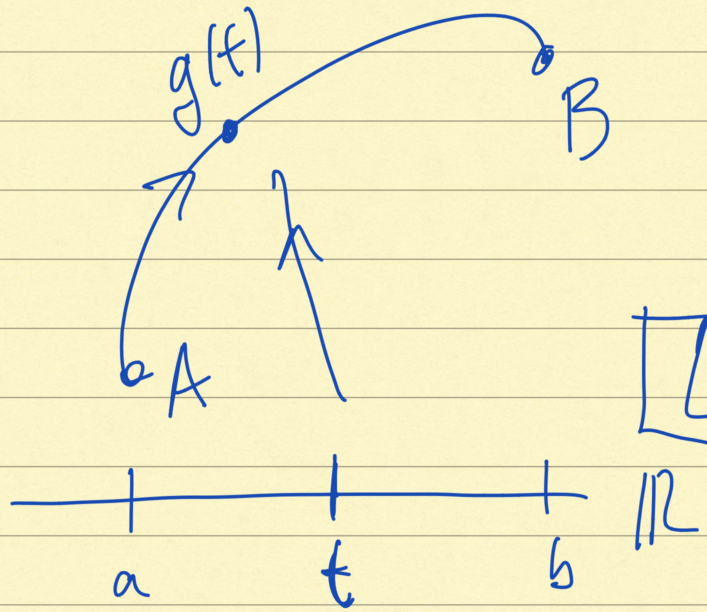
Linhas e superfícies → <u>casos importantes</u>

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^3$.

$$DF(\cdot) = \begin{bmatrix} \cdots & \nabla F_1 & \cdots \\ \cdots & \nabla F_2 & \cdots \\ & \cdots & \\ \cdots & \nabla F_m & \cdots \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$$

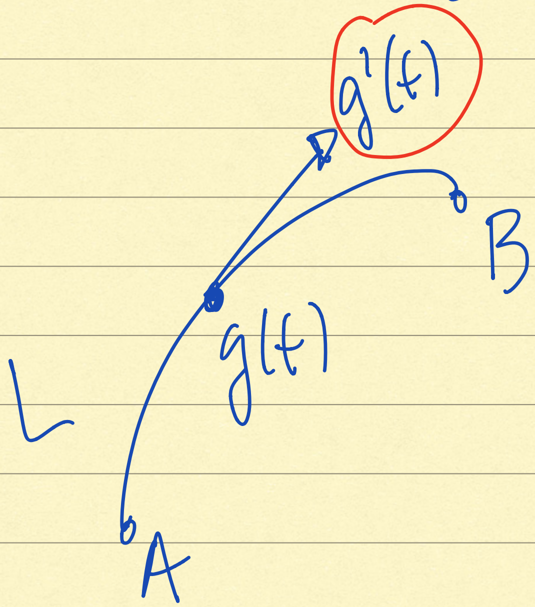
<u>Linha em $\mathbb{R}^4$</u>: $L \subset \mathbb{R}^4$



$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$
contínua

$\boxed{L \equiv \text{imagem de } g}$

Se $g \in C^1$, $g'(t) \equiv$ vector tangente a L no ponto $g(t)$.



$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$$

$x \in L \subset S$

$x = g(t)$

$F(x) = F(g(t)) = 0$

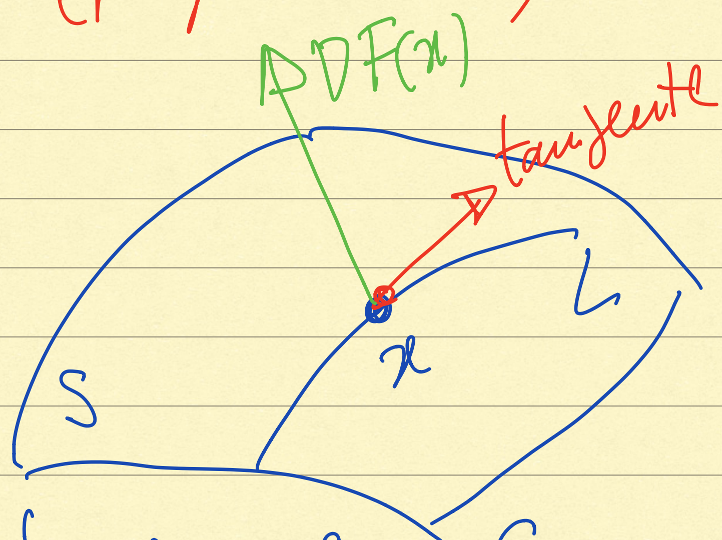
$F(g(t)) = 0$ em $L \subset S$

Derivando, tem-se

$$\nabla F(g(t)) \cdot g'(t) = 0$$

$$\underbrace{\nabla F(x)} \cdot \underbrace{g'(t)}_{\text{tangente}} = 0$$

ortogonal (perpendicular) ao tangente!

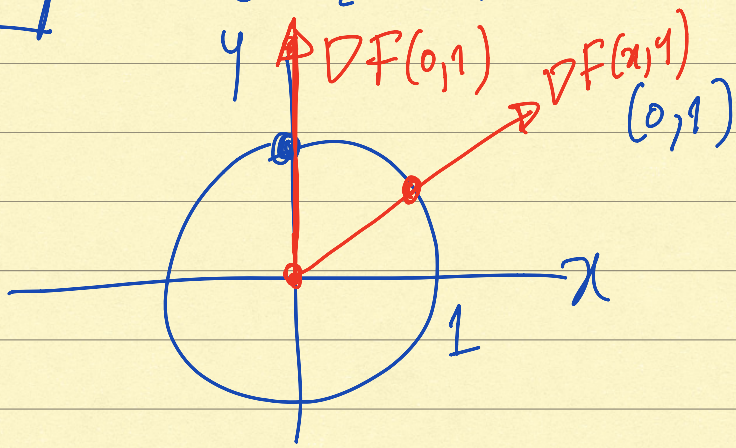


$\nabla F(x)$ é ortogonal a S em x.!

$\nabla F(x)$ é perpendicular ao conjunto em que F é constante no ponto x.

— // —

Exemplo: $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

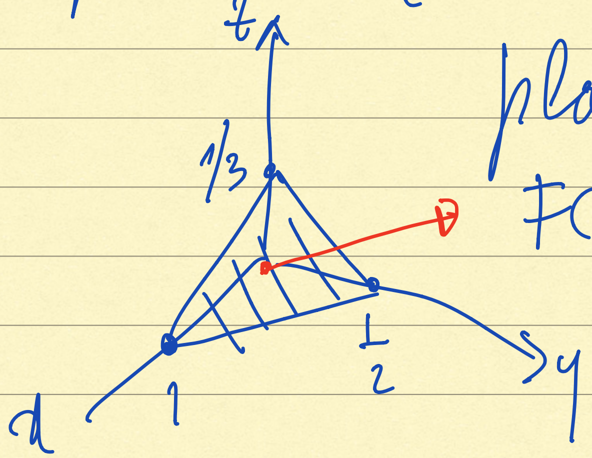


$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$DF(x,y) = [2x \quad 2y] \equiv (2x, 2y)$

$DF(0,1) = (0,2)$

Exemplo: $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 1\}$



plano.

$F(x,y,z) = x + 2y + 3z - 1 = 0$

$DF(x,y,z) = (1, 2, 3)$

$M \equiv$ Variedade $-(n-m)$

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ m < n,\quad C^1$

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \cdots & DF_1(x) & \cdots \\ & \cdots & \\ \cdots & DF_m(x) & \cdots \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$F(x) = 0$

$$\{\nabla F_1(x), \nabla F_2(x), \ldots, \nabla F_m(x)\}$$

linear/ ind. $\Rightarrow$ geram um subespaço de $\mathbb{R}^n$;

$\Rightarrow$ Base do espaço NORMAL a M no ponto x.

— " —

$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \ldots \\ F_m(x) = 0 \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$

$F = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$$

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{livres}}}{x}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dependentes}}}{y})$$

$$F(x,y) = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \det D_y F(x,y) \neq 0}}{\iff} y = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{implícita}}}{f}(x)$$

$$\begin{bmatrix} D_x F(\cdot) & \vdots & \underbrace{D_y F(\cdot)}_{m \times m} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$M = \{ (x,y) : F(x,y) = 0 \}$$

Conjunto de nível zero de F.

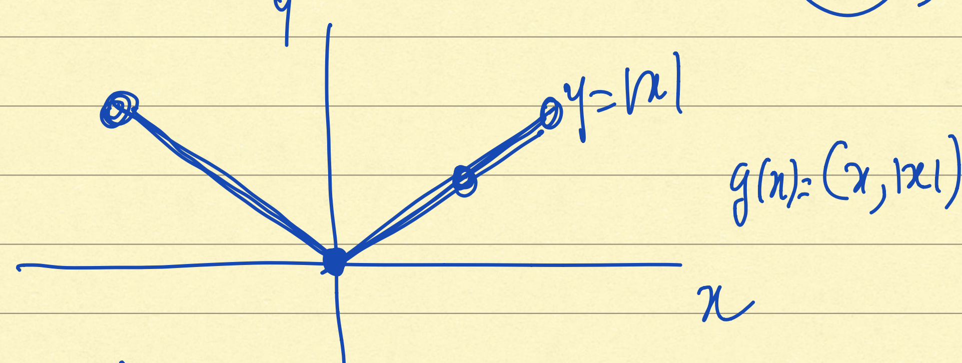
$$M = \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$$ Conjunto de nível

$$= \{(x,y) : y = f(x)\} \;?$$

imagem   objecto de f

$$\overset{?}{=} \boxed{\text{gráfico de } f, \; f \in C^1}$$

Exemplo: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$



não é variedade $f(x) = |x|$

$f \notin C^1$.

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2+y^2\}$

<u>gráfico de</u> $f(x,y) = x^2+y^2$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1.

$\Rightarrow$ M variedade-2 //.

<u>alternativamente</u>:

$$M = \{(x,y,z) : \underbrace{z-x^2-y^2}_{F(x,y,z)=0} = 0\}$$

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} -2x & -2y & 1 \end{bmatrix}$$

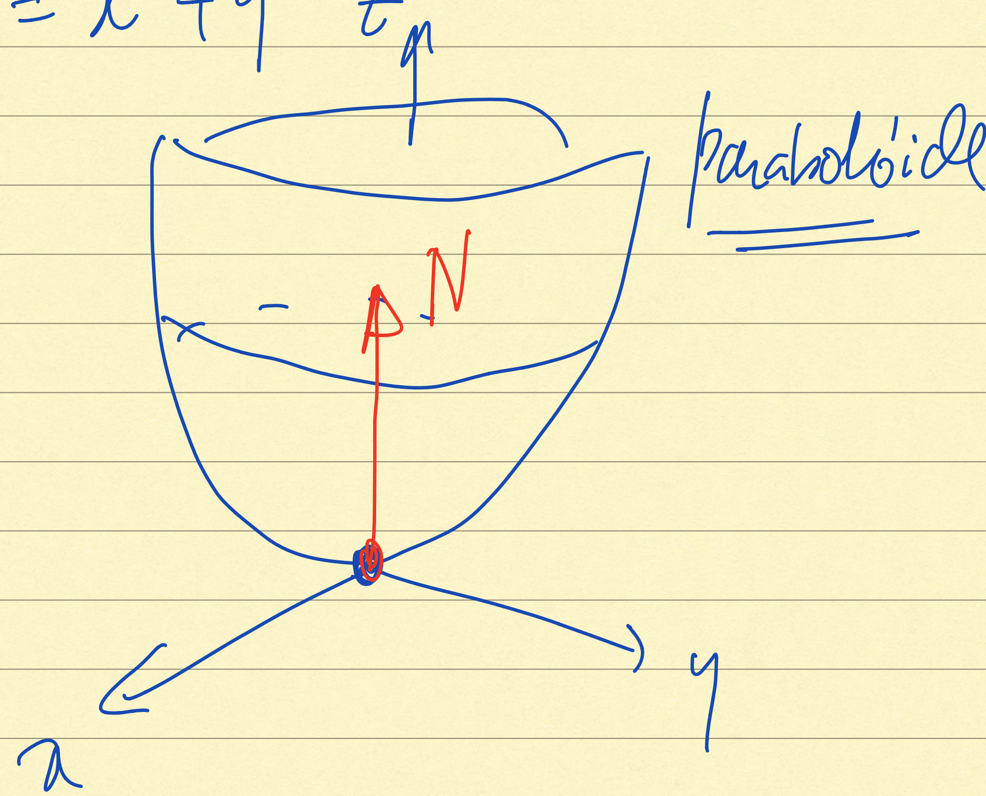
$\neq 0$

variedade-(3-1)

variedade-2.

Conjunto de nível de F

$z = x^2 + y^2$



$$DF(0,0,0) = \boxed{(0,0,1)} = N$$

$$M = \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$$
$$= \{(x,y) : y = f(x)\}$$
$$= \{(x, f(x))\}$$

$= \{ g(x) \}$ $\qquad g : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$, C^1

$=$ __imagem__ da função $\boxed{g \in C^1}$

$g(x) = (x, f(x))$

se $x_1 \neq x_2$

$g(x_1) = (x_1, f(x_1))$

$\neq \qquad\qquad \neq$

$g(x_2) = (x_2, f(x_2))$

$\boxed{g \text{ é injectiva.}}$

... $g =$ __parametrização__ de M.